ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЙ НУЖНА ШКАЛА

Развитие науки и техники неразрывно связано с измерениями. Измерение – один из способов познания. Исследования сопровождаются измерениями, позволяющими установить количественные соотношения и закономерности свойств изучаемых явлений. Д.И. Менделеев писал: «Наука начинается с тех пор, как начинают измерять; точная наука немыслима без меры[1]».

Количественные соотношения свойств изучаемых явлений выражаются числами. Использование чисел не обходится без недоразумений. С одной стороны числа, употребляемые для выражения количественных оценок, обладают не всеми свойствами, присущими числам вообще. С другой стороны, количественные оценки могут обладать ограниченным набором свойств, присущих изучаемому явлению. Поэтому, не ко всем количественным оценкам можно применять известный набор арифметических операций, определенных для чисел. Набор допустимых операций определяется тем, шкалу[2] какого рода образуют используемые оценки. Таких шкал – четыре.

Шкала классификации

Самая простая система числовых обозначений называется шкалой классификации (или шкалой наименований). Она применяется тогда, когда числа, поставленные в соответствие отдельным объектам, лишь позволяют отличать их друг от друга. Пример – номера автомашин, марки приборов... Никаким математическим соотношениям и операциям используемые здесь числа не подлежат. Автомобиль под номером 22-22 не обязательно вдвое тяжелее или дороже машины с номером 11-11. В этом случае числа являются средством классификации, и операции над ними не имеют смысла.

Шкала порядка

Более тонкая шкала образуется тогда, когда появляется возможность не только различить, но и упорядочить объекты по какому-либо признаку. Это так называемая шкала порядка. Примеры подобного рода – шкала твердости минералов, шкала силы ветра, школьные отметки...

Сравнению объектов по тому или иному признаку при построении любой шкалы соответствует сравнение чисел по величине. При этом используются свойства упорядоченности чисел. Следует заметить, что наряду с «основными» свойствами действительных чисел известны и «вторичные», выведенные из «основных» в виде логического следствия. Одно из них гласит: любые два действительных числа удовлетворяют одному и только одному из трех соотношений:

– первое больше второго,
– второе больше первого,
– эти числа равны.

Практические аналоги этого правила отыскать нетрудно. Вот, например, как сравниваются по твердости минералы: образцом одного пытаются сделать царапину на другом. Если попытка удачна, первый тверже второго. Если царапина получается на первом, тверже второй минерал. Если результат испытания в обоих случаях одинаков, минералы одинаковы по твердости.

---

[1] Мера – средство измерения, предназначенное для воспроизведения физической величины заданного размера.

[2] Шкала [лат. scala лестница] – 1) ряд цифр или величин, расположенных в нисходящем или восходящем порядке; 2) линейка (или циферблат) с делениями в различных измерительных приборах.

Сопоставляя числа с признаками объектов, мы в количественных выкладках используем не все свойства этих чисел. На роль избранных свойств могут попадать и «вторичные». Среди свойств упорядоченности, вытекающих из «основных», важнейшим является транзитивность:

$$\text{если } a > b \text{ , и } b > c\text{, то } a > c.$$

Именно так и обстоит дело при сравнении твердости минералов: если алмаз оставляет царапину на кварце, а кварц – на флюорите, то алмаз процарапывает и флюорит. Таким образом, ряд чисел возрастающих по величине мы сопоставляем с рядом минералов, выстроенных по твердости. На этом основана шкала твердости, предложенная в 1811 году Ф. Моосом. Тальку, как наиболее мягкому минералу, в ней приписывается самый низкий показатель твердости, единица, алмазу – чемпиону твердости – самый высокий, десятка.

Очевидно, что для составления шкалы твердости можно было бы использовать и другие числа, например, одни лишь четные, от двойки до двадцати, или квадраты первых десяти натуральных чисел, от единицы до сотни. Они отразили бы упорядоченность тех же минералов по твердости не хуже чисел, употребленных Моосом. Столь широкий произвол говорит о том, что бессмысленно в рамках подобной шкалы ставить вопрос «насколько кварц тверже флюорита?» или «во сколько раз флюорит уступает по твердости алмазу?»

Такие рассуждения можно развивать и далее. Транзитивность в ряду чисел присуща не только отношению «больше», но и отношению «меньше»: если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$. А это значит, что, упорядочивая объекты по какому-либо признаку, мы вправе сопоставить с их рядом цепочку не только возрастающих, но и убывающих чисел.

Школьник за отличные знания получает отметку 5, за удовлетворительные – 3, за очень плохие – 1. А для его венгерского ровесника высшей отметкой служит 1, низшей – 5. Если это не укладывается в голове, вспомните, что точно таким же образом численно выражается сорт товара: первый сорт лучше третьего.

На сколько лучше, во сколько раз лучше, говорить бессмысленно. Выражая сорт числом, мы опираемся лишь на свойства упорядоченности чисел и никоим образом не используем другие свойства числа. А потому некорректно задавать вопросы, ответ на которые должен использовать свойства сложения и умножения, вычитания и деления.

Шкала интервалов

Свойства чисел полнее отражают свойства соответствующих параметров[1] объектов исследований при использовании шкалы интервалов. Примером такой шкалы может служить термометр. На термометре, проградуированном в градусах Цельсия, числу 0 соответствует замерзание воды, 100 – кипение. Между этими пределами шкала разбивается равномерно и так же продолжается в запредельные области – ниже нуля и выше ста градусов.

Шкала интервалов выглядит строже, нежели шкала порядка. Но ее построение не исключает известного произвола при измерении температуры: в житейской практике мы используем шкалу Цельсия; физики предпочитают шкалу Кельвина; в США широко используется шкала Фаренгейта; в Европе до недавнего времени использовали шкалы *Цельсия* и *Реомюра*.

Эти шкалы существенно отличаются одна от другой. Причина различия – в выборе начала и единицы отсчета. Реомюр использовал в качестве опорных точек шкалы те же температуры, что и Цельсий, но промежуток между ними разбил не на 100, а на 80 делений. Фаренгейт полагал за нулевую точку шкалы температуру таяния смеси льда с нашатырем...

Не случайно выбрано начало отсчета для шкалы Кельвина. Абсолютный ноль на шкале Кельвина соответствует нулевой кинетической энергии частиц вещества.

Рассмотрим, как появляется на шкале интервалов единица отсчета. При разработке абсолютной шкалы температур градус был при-

[1] Параметр в технике – это величина, характеризующая какое-либо свойство объекта исследований, например, масса, температура и т.п.

нят таким же, как и в шкале Цельсия. Естественный масштаб температуры в природе не обнаружен. А в такой ситуации нельзя ждать, что его назначит, например, математика.

Обратимся к перечню свойств действительных чисел и посмотрим, как по ходу их изложения появляется единица. «Существует число, обозначаемое 1 и называемое единицей...» Как видим, от этого числа требуется лишь то, чтобы оно существовало. Таким образом, не так уж важно, какой промежуток на шкале интервалов получит обозначение единицы, если она не задана природой.

Представшие перед нами парадоксы становятся объяснимыми, если ответить на вопрос: на каких свойствах действительных чисел основывается шкала интервалов? На свойствах порядка и сложения. Это видно на примере типичной шкалы интервалов – хронологической, предназначенной для измерения времени.

На ней царит строгий порядок: каждое событие отмечено датой. Сравнивая даты по величине, мы судим, произошло ли одно событие раньше другого, позже его или одновременно с ним. Свойства сложения проявляются тогда, когда мы назначаем встречу через определенный срок и прибавляем договоренное количество дней к текущей дате или когда определяем, на сколько одно событие произошло позже другого, и вычитаем от даты первого события дату другого.

Шкала отношений

Если вас спросить, во сколько раз больше времени прошло до какого-либо одного события, чем до другого, вы почувствуете незавершенность вопроса и уточните: «Прошло, с какого момента?» И, получив ответ на уточняющий вопрос, произведете два вычитания и одно деление, вычислив искомое число.

Обратите внимание: вопрос «насколько больше времени?», встретившийся абзацем ранее, никаких уточняющих справок не потребовал. Вопрос «во сколько раз больше времени?» требует указания начала отсчета на хронологической шкале. Абсолютного начала отсчета на ней нет. Поэтому операциям умножения или деления, когда они производятся с датами, предшествует операция вычитания. Иными словами, умножение и деление над числами, выражающими даты, выполнимы постольку, поскольку выполнимы вычитание и сложение.

Такая оговорка бессмысленна, когда на шкале измерений существует начало отсчета. Так обстоит дело с измерениями массы или длины: нуль массы – это отсутствие вещества, нуль длины – отсутствие объекта. Шкала, интервалов, имеющая абсолютную начальную отметку, называется шкалой отношений. С числами, проставленными на ней, можно совершать операции сравнения и все четыре арифметических действия. Можно говорить, на сколько и во сколько раз один стержень длиннее другого, один груз тяжелее другого и т.д.

Превращения шкал

Шкала классификации и шкала порядка, шкала интервалов и шкала отношений... Каждая последующая шкала совершеннее предыдущей. Можно превратить менее совершенную шкалу в более совершенную, скажем, преобразовать шкалу порядка в шкалу интервалов.

Первые термометры были неградуированными: поднимаясь и опускаясь, столбик жидкости в них позволял судить лишь о понижении и повышении температуры. Шкала ее измерения была в то время лишь шкалой порядка. Открытие Гуком и Гюйгенсом постоянства температур плавления и кипения веществ позволило нанести на шкалу термометра точки отсчета, проградуировать ее и таким образом превратить в шкалу интервалов. Затем абсолютная термодинамическая шкала температур Кельвина стала шкалой отношений.

Следующий случай более сложный. На шкале Мооса от алмаза до корунда – одни шаг, как и от корунда до топаза. Специалист знает, как незначительно различие твердости между топазом и корундом в сравнении с различием между корундом и алмазом. Сколько баллов следует добавить к оценке твердости алмаза, чтобы согласовать традиционную минералогическую шкалу твердости с опытом специалистов?

Для реформы шкалы Мооса может служить кристаллография с ее четкими представлениями о зависимости между строением и прочностью кристаллической решетки.

Измерять все, что измеримо

Какой студент не жаловался на то, что экзаменаторам свойственна субъективность? Хорошо, если бы оценку на экзамене ставил автомат – объективно, точно, быстро. Но как объяснить, за что следует ставить двойку, а за что пятерку?

В основе одного из методов оценки качества обучения лежит понятие доли усвоенной информации. Информация, «возвращаемая» учащимся на экзамене, сопоставляется с полной информацией, которую он получил в процессе обучения. Например, если в экзаменационном билете пять равноценных вопросов, то верный ответ на один из них означает, что студент вернул пятую часть полученных им сведений.

Как же теперь, исходя из измеренной тем или иным способом возвращенной информации, ставить оценку за ответ? Простая пропорциональность тут не годится: каждый, кто хоть раз принимал или даже просто сдавал экзамен, знает, что между двойкой и тройкой разница значительно больше, чем между четверкой и пятеркой.

Один из подходов, учитывающих подобную нелинейность, разработан по аналогии с принципом глазомерного измерения. Когда человек оценивает на глаз длину предмета, он многократно сравнивает его с *эталоном*. Вначале это грубая, а затем все более точная оценка. При этом приходится мысленно делить эталон на части. С наибольшей точностью человек делит отрезки пополам. В результате первой оценки точность измерения будет составлять 1/2, в результате второй – 3/4, в результате третьей – 7/8 и т.д. Если характеризовать каждое измерение его номером n, то точность измерения выразится дробью $(2^n - 1)/2^n$. В нашем случае номер n будет соответствовать оценочному баллу.

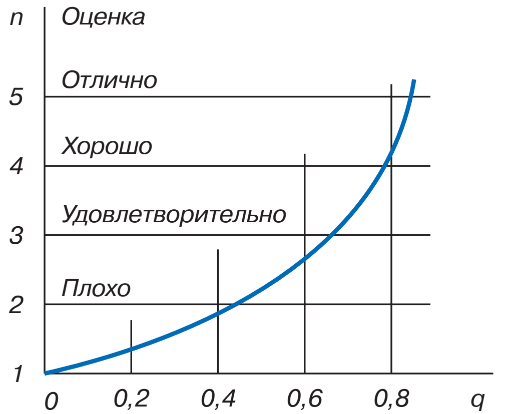

Рис. 1.1. **График зависимости оценки от доли возвращенной информации**

В каждой системе оценок существует максимальный балл N. Соответствующая ему точность равна $\frac{2^N - 1}{2^N}$. Обозначим через k дробь: $k = \frac{2^N}{2^N - 1}$. При четырехбалльной системе оценок, от двойки до пятерки, $k = \frac{16}{15}$.

Долю возвращенной информации от полной θ следует выразить соотношением: $\theta = k\frac{2^n - 1}{2^n}$. Тогда зависимость балла n от доли возвращенной информации:

$$n = 3{,}31\lg\left(\frac{\theta}{k} - \theta\right).$$

График зависимости приведен на рис. 1.1. Эксперимент показал согласие такого подхода с оценками опытных педагогов.

Примечания

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ШКАЛЫ, системы сопоставимых числовых значений температуры. Существуют абсолютные термодинамические температурные шкалы (шкала Кельвина) и различные эмпирические температурные шкалы, реализуемые при помощи свойств веществ, зависящих от температуры (тепловое расширение, изменение электрического сопротивления с температурой и др.). Эмпирические температурные шкалы различаются начальными точками отсчета и размером применяемой единицы температуры: °C (шкала Цельсия), °R (шкала Реомюра), °F (шкала Фаренгейта). 1°R = 1,25°C, 1F = 5/9°C. Температурная шкала, практически воспроизводящая шкалу Кельвина (1K = 1°C), называется международной практической температурной шкалой.

ЭТАЛОН [фр. etalon] – 1) образцовая мера (или измерительный прибор), служащий для воспроизведения, хранения и передачи единиц измерения с наивысшей достижимой при данном состоянии науки и техники точностью; 2) мерило, образец для сравнения с чем-либо.

Источники информации:

1. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин. Л.: Наука, 1974. – 108 с.
2. Большая энциклопедия Кирилла и Мефодия 97.
3. Словарь иностранных слов.– 12-е изд. М.: Рус. яз., 1985.
4. Физический энциклопедический словарь.– М.: Сов. энциклопедия, 1984.– 944 с.
5. Наука и жизнь, № 9, 1986 г.

Электронная версия:

Дата публикации:

11 апреля 1998 года