Кризис релятивистских теорий

Виктор КУЛИГИН, Галина КУЛИГИНА, Мария КОРНЕВА
Исследовательская группа «Анализ»

Часть 2. Анализ основ электродинамики

Установлено, что задача Коши для волнового уравнения не имеет единственного решения. Показано, что квазистатические явления электродинамики не имеют правильного объяснения в рамках кулоновской калибровки и калибровки Лоренца. Преобразование Лоренца имеет ограниченные пределы применимости.

It is shown that a wave equation under initial conditions has no an unique solution. It is shown that quasistatical phenomena cannot be explained in framework of Lorentz's gauge or Colomb's gauge. Lorentz's transformation is of limited usefulness.

Введение

В предыдущей Части 1 мы искали сущность преобразования Лоренца, полагая, что это преобразование отвечает физическим явлениям. Например, существует точка зрения, согласно которой преобразование Лоренца имеет непосредственную поддержку со стороны электродинамики. Оказывается, что эта точка зрения ошибочна. Ниже будет показано, что преобразование Лоренца не применимо к явлениям электродинамики. Причина в математических ошибках.

Более того, исследуя трудности современных физических теорий, мы пришли к заключению, что часть этих трудностей имеет математические корни. Причина в том, что задача Коши для волновых уравнений, как это будет показано ниже, *не имеет единственного решения*. Это тем более удивительно, что существует теорема о существовании и единственности решения этой задачи [1]. Покажем это на примере.

1. Проблема единственности решения

Пример нарушения единственности решения

Рассмотрим для иллюстрации простой пример. Пусть некоторая функция U удовлетворяет однородному волновому уравнению с нулевыми начальными условиями.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0\,;\ U\Big|_{t=0} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \qquad (1.1)$$

Первое решение. Мы имеем тривиальное решение [1], функция U равна нулю:

$$U_1 = 0. \qquad (1.2)$$

Второе решение. Запишем второе решение этой задачи.

$$\begin{aligned} U_2(x,t) = &-\frac{A}{2}[e^{-\alpha(x+ct)^2} + e^{-\alpha(x-ct)^2}] + \\ &+ \frac{A\beta}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} e^{-\alpha\xi^2} d\xi + \frac{1}{2c}\int\limits_0^t \Big[\int\limits_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi\Big]\, d\tau + Ae^{-\beta t}e^{-\alpha x^2} \end{aligned} \qquad (1.3)$$

где:

$$f(\xi,\tau) = -Ac^2 e^{-\beta\tau} e^{-\alpha\xi^2}\,[2\alpha(1-2\alpha\xi^2) + \frac{\beta^2}{c^2}] \qquad (1.4)$$

α, β, A суть некоторые постоянные величины ($\alpha > 0$, $\beta > 0$).

Второе решение U_2 $(x,\ t)$ удовлетворяет поставленной задаче Коши, что можно подтвердить прямой проверкой. Это решение отлично от нуля и не имеет сингулярностей.

Таким образом, мы имеем два решения одной и той же задачи, т.е. теорема единственности решения не выполняется. Этот пример не уникален, и мы могли бы привести для иллюстрации другие примеры, например, для векторного уравнения в трехмерном пространстве с граничными условиями.

Метод получения второго решения

Теперь мы рассмотрим метод получения второго решения для задачи Коши. Для наглядности мы рассмотрим построение решения неоднородного уравнения без граничных условий. Этот метод можно использовать и для задач с граничными условиями.

Пусть некоторая функция U является решением волнового уравнения

$$\Delta U - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = f(\mathbf{r};t) \tag{1.6}$$

где: U – некоторое скалярное поле; v – характеристическая скорость распространения; f – источник скалярного поля U.

Скалярное поле U должно удовлетворять следующим начальным условиям.

$$U(\mathbf{r};0) = \vartheta(\mathbf{r}); \quad \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(\mathbf{r}) \tag{1.7}$$

Решение этой задачи существует [1] и мы запишем его как $U_1(\mathbf{r};\ t)$. Мы будем называть это стандартное решение **прямым** решением волнового уравнения или волновым решением.

Теперь нам предстоит построить второе решение. Мы будем искать это решение как сумму двух функций:

$$U = u(\mathbf{r};t) + V(\mathbf{r};t) \tag{1.8}$$

После подстановки выражения (1.8) в уравнение (1.6) получаем:

$$\Delta u - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta V - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = f(\mathbf{r};t) \tag{1.9}$$

Поскольку решение (1.9) содержит уже две неизвестных функции вместо одной, мы должны добавить некоторое дополнительное условие. Существует много вариантов задания этого условия, например:

$\Delta V_1 = f(\mathbf{r};\, t)$, или $\Delta V_2 = f(\mathbf{r};\, t) + F(\mathbf{r};\, t)$, или $\Delta V_3 + \alpha V_3 = f(\mathbf{r};\, t)$ и т.д. (1.10)

где: F ($\mathbf{r}$; t) – любая интегрируемая функция; определяемая условиями конкретной физической задачи; α – некоторая константа.

В частности, в предыдущем примере мы выбрали второй вариант из (1.10), где f($\mathbf{r}$;t)=0, а F($\mathbf{r}$;t) определяется выражением (1.4).

Положим для определенности, что функция V удовлетворяет уравнению Пуассона. Пусть

$$\Delta V = f(\mathbf{r};t) \tag{1.11}$$

Согласно [1], решение этого уравнения существует. Мы будем считать, что оно нам **известно**. Здесь же заметим, что принцип причинности *не нарушается* (см. [2] или Часть 3).

Рассмотрим теперь уравнение для потенциала u, которое следует из (1.6) и (1.11). Правая часть этого уравнения нам *известна*, поскольку, как мы условились, нам известно решение уравнения (1.11).

$$\Delta u - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\Delta V + \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + f(\mathbf{r};t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \tag{1.12}$$

Чтобы новое решение U_2 удовлетворяло начальным условиям (1.7), мы должны задать другие начальные условия для u.

$$u(\mathbf{r};0) = \vartheta(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r};0);\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(\mathbf{r}) - \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=0}. \tag{1.13}$$

Поскольку решение (1.11) нам *известно*, начальные условия (1.13) также определены и известны. В общем случае решение уравнения (1.12) при условии (1.13) существует [1]. Обозначим это решение как $V(\mathbf{r};\, t)$.

Таким образом, мы построили новое решение уравнения (1.6), удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$U_2 = u(\mathbf{r};\, t) + V(\mathbf{r};\, t) \tag{1.14}$$

Мы могли бы найти совершенно другое решение той же задачи. Для этой цели мы могли бы воспользоваться другими условиями из (1.10). Заметим, что рассмотренный нами метод получения второго решения может быть использован, например, как для уравнений Максвелла, так и для уравнения Шредингера.

2. Математические калибровки

Для удобства мы назвали решение U_1 уравнения (1.6) **прямым** решением волнового уравнения или волновым решением. Это волновое решение не содержит слагаемых, обладающих другими свойствами, например, *мгновеннодействующих функций*. Процедура поиска *других* решений, которые мы будем именовать как **параллельные решения** волнового уравнения, непосредственно связана с введением в новое решение дополнительной функции, которая обладает *иными,* отличными от волновых, пространственными и временными свойствами. Эту процедуру мы будем называть *математической калибровкой волнового уравнения*. Она имеет следующие особенности:

1. Каждая математическая калибровка имеет *единственное* решение, если мы не проводим над ней дальнейших процедур калибровочного характера.
2. Решения, соответствующие различным математическим калибровкам исходного волнового уравнения, отличаются друг от друга, т.е. не являются, вообще говоря, взаимозависимыми. Калибровочная инвариантность решений, т.е. независимость решения от выбора калибровки, в общем случае *не имеет места.*

Это очень важный и принципиальный результат, который требует переоценки многих положений физических теорий, опирающихся **на мнение** *о калибровочной инвариантности*. Это мнение уже превратилось в предрассудок или догму.

Калибровки в электродинамике

Математические калибровки уравнений Максвелла

Нарушение единственности решения обуславливает появление ряда новых проблем, например, проблему ковариантности физических уравнений и их решений. Это самостоятельная проблема, которую мы не будем здесь рассматривать. Чтобы сравнить особенности различных калибровок, мы будем считать, что уравнения и калибровки этих уравнений справедливы в некоторой фиксированной системе отсчета, где покоится наблюдатель. Иными словами, мы будем сравнивать решения, соответствующие различным калибровкам, в одной и той же *фиксированной инерциальной системе отсчета.*

Запишем уравнения Максвелла.

$$\begin{aligned} &\mathrm{rot}\mathbf{H} - \varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j}; \quad \mathrm{div}\mathbf{H} = 0 \\ &\mathrm{rot}\mathbf{E} + \mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = 0; \quad \mathrm{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \end{aligned} \tag{2.1}$$

В системе (2.1) вектора **E** и **H** связаны между собой. Мы можем разделить уравнения для **E** и **H**.

$$\begin{aligned} &\mathrm{rotrot}\mathbf{H} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = rot\mathbf{j}; \quad \mathrm{div}\mathbf{H} = 0 \\ &\mathrm{rotrot}\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t}; \qquad \mathrm{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Прямое решение каждого из уравнений системы (2.2) $\mathbf{E}_{w1}$ и $\mathbf{H}_{w1}$ является волновым. Индекс "*w*" (*wave* – волновой) будет означать в дальнейшем, что мы имеем дело с ***волновым*** решением, т.е. с **прямым** решением любого волнового уравнения без использования каких-либо калибровок.

Запишем уравнения (2.1) в другой калибровке. Для этой цели мы представим вектор **E** в (2.1) как сумму:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_w + \mathbf{E}_{ins} \tag{2.3}$$

где $\mathbf{E}_{ins}$ является решением уравнения Пуассона.

Индекс "*ins*" (*ins*tantaneous – мгновеннодействующий) означает, что мы имеем дело с прямым решением уравнения Пуассона, например, т.е. с **мгновеннодействующими** полями и потенциалами.

Добавим для определенности следующие условия:

$$div\mathbf{E}_w = 0; \; rot\mathbf{E}_{ins} = 0; \tag{2.4}$$

Теперь система уравнений полностью определена и, используя процедуру разделения уравнений для **E** и **H**, мы можем записать следующую систему уравнений.

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{H}_w + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}_w}{\partial t^2} = \mathrm{rot}\mathbf{j}; \quad \mathrm{div}\mathbf{H}_w = 0$$

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{E}_w + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}_w}{\partial t^2} = -\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}_{ins}}{\partial t^2}; \quad \mathrm{div}\mathbf{E}_w = 0 \qquad (2.5)$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E}_{ins} = 0; \quad \mathrm{div}\mathbf{E}_{ins} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

Система (2.5) описывает напряженность электрического поля $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{ins2} + \mathbf{E}_{w2}$ и магнитного $\mathbf{H}_{w2}$. Это есть *параллельное* решение по отношению к *прямому* решению $\mathbf{E}_{w1}$ и $\mathbf{H}_{w1}$ волновых уравнений (2.2). Поля, описываемые уравнениями (2.2), отличаются от полей, описываемых уравнениями (2.5).

Физические калибровки уравнений Максвелла

Здесь легко просматривается параллель между уравнениями (2.2), (2.5) с одной стороны и известными калибровками уравнений Максвелла (2.1).

Если мы выразим в уравнении (2.5) напряженность электрического поля $\mathbf{E}_{ins}$ через градиент скалярного потенциала $-\mathrm{grad}\varphi_{ins}$, $\mathbf{E}_w$ через векторный потенциал $-\frac{\partial \mathbf{A}_w}{\partial t}$ и напряженность магнитного поля $\mathbf{H}_w$ запишем как $\mathrm{rot}\mathbf{A}_w$, то получим кулоновскую калибровку уравнений Максвелла.

$$\Delta \mathbf{A}_w - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}_w}{\partial t^2} = -\mu\,\mathbf{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}\phi_{ins}; \ \Delta\phi_{ins} = -\frac{\rho}{\varepsilon}; \ \mathrm{div}\mathbf{A}_w = 0 \qquad (2.6)$$

Если же мы положим $\mathbf{E}_w = \mathbf{E}_w = -\mathrm{grad}\varphi_w - \frac{\partial \mathbf{A}_w}{\partial t}$ и $\mathbf{H}_w = \mathrm{rot}\mathbf{A}_w$ в уравнениях (2.2), тогда мы придем к калибровке Лоренца.

$$\Delta \mathbf{A}_w - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}_w}{\partial t^2} = -\mu\,\mathbf{j}; \ \Delta\phi_w - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi_w}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}; \mathrm{div}\mathbf{A}_w + \frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial\,\phi_w}{\partial t} = 0 \qquad (2.7)$$

Следует заметить, что при таком выводе калибровок неизбежно появляются дополнительные поля (потенциалы) благодаря более высокому порядку операторов, действующих на **E** и **H** в уравнениях (2.2) и (2.5), по отношению к операторам в уравнениях (2.1). Эти поля не имеют своих источников и могут быть легко исключены из рассмотрения.

Из рассмотренной выше связи следует, что физическая калибровка электромагнитных потенциалов, связанная с выбором условия для div**A,** имеет прямую связь с математической калибровкой волновых уравнений и сводится к ней. Поэтому в дальнейшем мы будем говорить о калибровках *вообще* (без прилагательных: «физическая», «математическая» и т.д.). Теперь можно сравнить характеры решений уравнений (2.2) и (2.5). Решение уравнений (2.5) содержит мгновеннодействующую напряженность поля $\mathbf{E}_{ins}$, которая отсутствует в решении уравнений (2.2). В некоторых книгах [3], [4] утверждается, что $\mathbf{E}_{ins}$ в кулоновской калибровке компенсируется некоторыми компонентами напряженности поля запаздывающего векторного потенциала и кулоновская калибровка полностью эквивалентна калибровке Лоренца. Это утверждение основывается на ошибочном предположении, что решение волнового уравнения единственно и не зависит от выбора калибровки. Независимость кулоновской калибровки от калибровки Лоренца рассмотрена в Приложении 1.

Необходимо сделать еще одно замечание. Проблема калибровки непосредственно связана с проблемой ковариантности уравнений. Это тем более важно, что мы установили отсутствие калибровочной инвариантности, т.е. зависимость решений одной и той же задачи от выбора калибровки. Как уже говорилось, проблема ковариантности – самостоятельная проблема и в этом докладе мы не будем ее рассматривать.

Калибровка калибровки Лоренца

Теперь нам предстоит найти ***параллельное*** решение калибровки Лоренца. Как известно, **прямое** решение в рамках этой калибровки (2.7) имеет волновой характер и не содержит мгновеннодействующих потенциалов и полей.

$$\mathbf{E}_{1w} = -\mathrm{grad}\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}; \qquad \mathbf{H}_{1\mathrm{w}} = \mathrm{rot}\mathbf{A}. \tag{2.8}$$

Мы поступим стандартным способом. Представим потенциалы **A** и φ как сумму мгновеннодействующих и волновых потенциалов.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{ins} + \mathbf{A}_{w}; \quad \phi = \phi_{ins} + \phi_{w} \tag{2.9}$$

Пусть теперь потенциалы $\mathbf{A}_{ins}, \phi_{ins}$ будут решениями соответствующих уравнений Пуассона.

$$\Delta\mathbf{A}_{ins} = -\mu\,\mathbf{j}; \quad \Delta\phi_{ins} = -\frac{\rho}{\varepsilon}; \quad \mathrm{div}\mathbf{A}_{ins} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}\phi_{ins} = 0 \tag{2.10}$$

Соответственно $\mathbf{A}_{w}$, ϕ_{w} должны быть *прямыми* решениями других волновых уравнений, удовлетворяющих соответствующим начальным и граничным условиям.

$$\begin{gathered}\Delta\mathbf{A}_{w} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}_{w}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}_{ins}}{\partial t^2};\\ \Delta\phi_{w} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi_{w}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi_{ins}}{\partial t^2};\\ \mathrm{div}\mathbf{A}_{w} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi_{w}}{\partial t} = 0\end{gathered} \tag{2.11}$$

Систему уравнений (2.10) и (2.11) можно условно назвать **калибровкой *калибровки Лоренца***. Таким образом, *параллельное* решение имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{2w} + \mathbf{E}_{2ins} = -\frac{\partial\mathbf{A}_{w}}{\partial t} - \mathrm{grad}\phi_{ins} - \frac{\partial\mathbf{A}_{ins}}{\partial t};\\ \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_{2\mathrm{w}} + \mathbf{H}_{2\mathrm{ins}} = \mathrm{rot}\mathbf{A}_{w} + \mathrm{rot}\mathbf{A}_{ins}.\end{gathered} \tag{2.12}$$

Нетрудно убедиться, что **прямое** решение (2.8) отличается от **параллельного** решения (2.12) того же уравнения. Здесь, например, мы имеем дело с двумя различными физическими механизмами ***излучения*** электромагнитных волн. Волновые поля (2.8) *прямого решения* генерируются непосредственно токами и зарядами, записанными в правой части уравнений. Волновые поля *параллельного решения* уравнений (2.11) возбуждаются мгновеннодействующими *полями зарядов*. Это следует из формы правой части уравнений (2.11). Помимо этого имеется еще одно принципиальное отличие. Электромагнитные поля в калибровке калибровки Лоренца можно разделить на два вида: мгновеннодействующие поля зарядов и электромагнитные волны. Поля зарядов всегда связаны с зарядами и определяются только величиной заряда. Если заряд покоится, его поле не зависит от предшествующей «истории» движения заряда. Напротив, электромагнитная волна, излучившись, «живет своей собственной жизнью». Она распространяется независимо от того, каково дальнейшее движение заряда. Электромагнитная волна и квазистатические поля зарядов, хотя и имеют взаимную связь, но обладают различными свойствами.

Напротив, стандартная калибровка Лоренца рассматривает квазистатические поля и электромагнитную волну как одинаковые поля с одинаковыми свойствами.

Предельный переход

Формально математически мы можем записать следующие соотношения между решениями калибровки Лоренца (2.8) и калибровки калибровки Лоренца (2.12):

$$\mathbf{E}_{2ins} = \lim_{c\to\infty} \mathbf{E}_{1w}; \quad \mathbf{H}_{2ins} = \lim_{c\to\infty} \mathbf{H}_{1w} . \tag{2.13}$$

Однако соотношения (2.13) не являются корректными как с физической, так и с математической точек зрения. Они не обусловлены причинно, поскольку поля $\mathbf{E}_{2ins}, \mathbf{H}_{2ins}$ не являются **прямым** решением волнового уравнения (2.7), т.е. не удовлетворяют волновому уравнению. Поля (2.7) принадлежат **параллельному** решению, т.е. **другой** калибровке.

Отсюда мы можем сделать следующий вывод. Предельный переход $c \to \infty$ следует использовать **осторожно**. В противном случае мы рискуем совершить незаконный переход из одной калибровки (например, калибровка Лоренца) в другую (калибровка калибровки Лоренца). Прямое решение (2.8) принципиально не может содержать мгновеннодействующих потенциалов.

Важное следствие

Предельный переход от *волнового* уравнения и **прямого** решения к *квазистатическому* уравнению и **параллельному** решению при $c \to \infty$ ***не***

является законным! *Квазистатические* явления электродинамики должны описываться собственной системой уравнений.

Энергетические соотношения в калибровке Лоренца

Тензор энергии-импульса

Сразу же заметим, что, коль скоро решение *зависит* от выбора калибровки, каждая калибровка будет иметь ***свои* законы сохранения**. Причина в том, что поля, имеющие различную природу, будут создавать потоки энергии, которые имеют разные свойства. В этом смысле закон сохранения Пойнтинга *не является* ***универсальным***, пригодным для любых калибровок.

Теперь мы выведем закон сохранения энергии для калибровки Лоренца. С этой целью запишем интеграл действия для электромагнитного поля [5].

$$S = \frac{1}{ic}\int [\frac{\varepsilon}{4} F_{ik}^2 - j_k A_k] d\Omega \qquad (3.1)$$

где: $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}$ тензор электромагнитного поля; $d\Omega$ – 4-мерный объем (dx; dy; dz; icdt).

Для получения уравнений электромагнитного поля мы должны варьировать 4-потенциал A_k. Мы будем полагать, что 4-плотность тока j_k не зависит от A_k.

$$\delta S = \frac{1}{ic}\int \{\frac{\varepsilon}{2}[\frac{\partial A_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\delta A_k - \frac{\partial A_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k}\delta A_k - \frac{\partial A_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k}\delta A_i] - j_k \delta A_k\} d\Omega = 0 \qquad (3.2)$$

После интегрирования по частям получим:

$$\delta S = \frac{1}{ic}\int [\varepsilon \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i^2} - j_k]\delta A_k d\Omega - \frac{1}{ic}\int_{S_i} \varepsilon \frac{\partial Ai}{\partial x_k}\delta A_k dS_i = 0 \qquad (3.3)$$

где dS_i – элемент 4-поверхности.

Во **втором** интеграле мы должны удовлетворить значениям для пределов интегрирования. Пределы интегрирования пространственных координат – бесконечность. Поля и потенциалы, как известно, на бесконечности равны нулю. Следовательно, на пространственных пределах интегрирования интеграл обращается в нуль. По условиям интегрирования начальная координата времени t_a и конечная t_b фиксированы и не варьируются. Поэтому в этих точках вариация интеграла δS равна нулю. Таким образом, второй интеграл равен нулю.

Вариация **первого** интеграла δS равна нулю, если интеграл имеет экстремум и интегрирование идет по экстремали. Поэтому в силу произвольности вариации 4-потенциала δA_k, выражение в квадратных скобках внутри первого интеграла должно быть равно нулю. Это «уравнение движения» для электромагнитного поля или уравнение Эйлера для 4-потенциала.

$$\varepsilon \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i^2} - j_k = 0 \tag{3.4}$$

Перепишем это уравнение в классической форме.

$$\frac{1}{\mu}[\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}] = -\mathbf{j}; \;\; \varepsilon[\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}] = -\rho \tag{3.5}$$

Условие Лоренца $\partial A_i \,/\, \partial x_i = 0$ следует непосредственно из уравнения непрерывности для тока $\partial j_i \,/\, \partial x_i = 0$ и системы уравнений (3.5).

Второй интеграл (3.3), как мы убедились, не дает вклада в уравнения (3.4) и (3.5). Поэтому мы можем записать интеграл действия в более простой форме.

$$S = \frac{1}{ic}\int[\Lambda - j_k A_k]d\Omega = 0 \tag{3.6}$$

где

$$\Lambda = \frac{\varepsilon}{2}(\frac{\partial A_k}{\partial x_i})^2 \tag{3.7}$$

Λ – это новая плотность функции Лагранжа для электромагнитного поля.

В этом нет ничего необычного, поскольку функция Лагранжа не определяется однозначным образом. Выражение (3.6) имеет вид:

$$S = \int_{t_a}^{t_b} \iiint\limits_{\infty} \{ \frac{1}{2\mu} [(\mathrm{rot}\mathbf{A})^2 + (\mathrm{div}\mathbf{A})^2 - (\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial ct})^2] - \varepsilon[(\mathrm{grad}\phi)^2 - (\frac{\partial \phi}{\partial ct})^2] - \\ - \mathbf{jA} + \rho\phi \} dxdydzdt \tag{3.8}$$

Опираясь на выражение (3.7) и используя метод получения тензора энергии-импульса электромагнитного поля [5], нетрудно записать выражение для этого тензора.

$$T_{il} = \varepsilon \left[\delta_{il} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_l}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \frac{\partial A_k}{\partial x_l} \right] \tag{3.9}$$

Закон сохранения энергии для калибровки Лоренца

Записанный тензор является симметричным. Из выражения (3.9) следует, что плотность энергии электромагнитного поля (компонент тензора T_{44}) равна

$$w = T_{44} = \frac{1}{2\mu} [(\mathrm{rot}\mathbf{A})^2 + (\mathrm{div}\mathbf{A})^2 + (\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial ct})^2] - \varepsilon[(\mathrm{grad}\phi)^2 + (\frac{\partial \phi}{\partial ct})^2] \tag{3.10}$$

Энергия электромагнитного поля, заключенная в объеме V есть

$$W = \int\limits_V w dv = \int\limits_V \{ \frac{1}{2\mu} [(\mathrm{rot}\mathbf{A})^2 + (\mathrm{div}\mathbf{A})^2 + (\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial ct})^2] - \varepsilon[(\mathrm{grad}\phi)^2 + (\frac{\partial \phi}{\partial ct})^2]\} dv \tag{3.11}$$

Рассмотрим теперь изменение энергии в этом объеме во времени.

$$\frac{dW}{dt} = \int\limits_V \{ \frac{1}{\mu} [\mathrm{rot}\mathbf{A} \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{rot}\mathbf{A} + \mathrm{div}\mathbf{A} \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}] - \\ - \varepsilon[\mathrm{grad}\phi \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{grad}\phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}]\} dv \tag{3.12}$$

После интегрирования (3.12) по частям и использования выражений (3.5), мы получим:

$$\int\limits_V \left\{ \frac{1}{2\mu} \left[(\mathrm{rot}\mathbf{A})^2 + (\mathrm{div}\mathbf{A})^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial ct} \right)^2 \right] - \varepsilon \left[(\mathrm{grad}\phi)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial ct} \right)^2 \right] \right\} dv =$$

$$= \oint_S [\frac{1}{\mu}(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \times \mathrm{rot}\mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\mathrm{div}\mathbf{A}) - \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}\mathrm{grad}\phi]\mathbf{n}^0 ds + \int_V (\mathbf{j}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t})dv \qquad (3.13)$$

где **n** – единичная нормаль к поверхности S.

Потенциалы **A** и φ являются независимыми, и мы можем записать два закона сохранения энергии для уравнений Максвелла в калибровке Лоренца в классической форме.

$$\mathrm{div}\mathbf{S} + \frac{\partial w}{\partial t} + p = 0 \qquad (3.14)$$

где:

$\mathbf{S} = \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}\mathrm{grad}\phi;\ \ \mathrm{w} = -\frac{\varepsilon}{2}\left[(\mathrm{grad}\phi)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial ct}\right)^2\right];\ \ p = \rho\frac{\partial \phi}{\partial t}$ – составляющие для скалярного потенциала.

$\mathbf{S} = -\frac{1}{\mu}(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \times \mathrm{rot}\mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\mathrm{div}\mathbf{A});\ \ \mathrm{w} = \frac{1}{2\mu}[(\mathrm{rot}\mathbf{A})^2 + (\mathrm{div}\mathbf{A})^2 + (\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial ct})^2];\ \ \mathrm{p} = -\mathbf{j}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

– составляющие для векторного потенциала.

Заметим, что этот вывод читатель не обнаружат в стандартном многотомнике теоретической физики Ландау и Лифшица. В нем современная физика представлена только лакированным фасадом. Проблемы и трудности спрятаны в полном соответствии с традициями современного позитивизма. И, если о них упоминается, то вскользь как о неприятных, но непринципиальных моментах теории.

Три вектора плотности потока

В соответствии с принципом суперпозиции векторный потенциал **A** и плотность тока **j** можно представить в виде суммы двух составляющих. Это соленоидальная (вихревая) и безвихревая составляющие плотности тока и векторного потенциала.

$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2;\ \mathbf{j} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2$ (3.15)

где: $\mathrm{div}\ \mathbf{A}_1 = 0$; $\mathrm{div}\ \mathbf{j}_1 = 0$; $\mathrm{rot}\ \mathbf{A}_2 = 0$; $\mathrm{rot}\ \mathbf{j}_2 = 0$.

Это не новая калибровка, а новое представление калибровки Лоренца.

Рассмотрим **точечный** источник потенциалов. Нетрудно видеть, что компоненты электрического и магнитного поля, обусловленные векторным потенциалом $\mathbf{A}_1$, всегда ортогональны компонентам электрического поля, обусловленного векторным потенциалом $\mathbf{A}_2$. Иными словами, имеют место следующие соотношения;

$$\left(\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial t}\right)=0\,;\quad \left(\mathrm{rot}\mathbf{A}_1\,\frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial t}\right)=0 \tag{3.16}$$

На больших расстояниях от системы источников векторного потенциала, когда размеры области, в которой локализованы движущиеся заряды, весьма малы по сравнению с расстоянием от наблюдателя до этой области, соотношение (3.16) имеет место и для системы зарядов.

С учетом выражения (3.15) калибровка Лоренца принимает следующий вид:

$$\Delta \mathbf{A}_1-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}_1}{\partial t^2}=-\mu \mathbf{j}_1 \tag{3.17}$$

$$\Delta \mathbf{A}_2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}_2}{\partial t^2}=-\mu \mathbf{j}_2 \tag{3.18}$$

$$\Delta \phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{3.19}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{A}_2+\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}=0 \tag{3.20}$$

Каждое уравнение имеет свою плотность потока и плотность энергии, которые представлены в Таблице 1.

Таблица 1.

Энергетические компоненты волновых полей

Поперечные волны векторного потенциала		
$\mathbf{S}_1 = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t}\times \mathrm{rot}\mathbf{A}_1$	$w_1 = \frac{1}{2\mu}[(\mathrm{rot}\mathbf{A}_1)^2 + (\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial ct})^2]$	$p_1 = -\mathbf{j}_1\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t}$
Продольные волны векторного потенциала		
$\mathbf{S}_2 = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial t}\mathrm{div}\mathbf{A}_2$	$w_2 = \frac{1}{2\mu}[(\mathrm{div}\mathbf{A}_2)^2 + (\frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial ct})^2]$	$p_2 = -\mathbf{j}_2\frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial t}$
Продольные волны скалярного потенциала		
$\mathbf{S}_3 = \varepsilon\frac{\partial \phi}{\partial t}\mathrm{grad}\phi$	$w_3 = -\frac{\varepsilon}{2}[(\mathrm{grad}\phi)^2 + (\frac{\partial \phi}{\partial ct})^2]$	$p_3 = \rho\frac{\partial \phi}{\partial t}$

Теперь мы можем сделать промежуточные выводы.

Во-первых, закон сохранения энергии Пойнтинга не является *уникальным и универсальным*. Это подтверждается нашей работой по решению проблемы электромагнитной массы [6] (см. также часть 5). В них показано, что в квазистатической электродинамике существуют другие энергетические соотношения. Например, имеет место *закон Умова* в его классической форме и *закон баланса кинетической энергии*, вербальная формулировка которого напоминает закон Ленца.

Во вторых, мы обращаем внимание на то, что энергия поля скалярного потенциала **отрицательна**. Как следствие, закон Кулона должен иметь другую формулировку: одноименные заряды должны **притягиваться**, а разноименные – **отталкиваться** (!). Эта проблема не нова. С ней постоянно сталкиваются в квантовой электродинамике. В следующем параграфе мы проанализируем причину отрицательности энергии поля скалярного потенциала.

Продольные электромагнитные волны

Убывание продольного поля на бесконечности

Рассмотрим систему зарядов, локализованных в области пространства, ограниченной некоторым радиусом а. В соответствии с теоремой Гаусса мы можем записать

$$\iiint_V \varepsilon \mathbf{E}\mathbf{n}^0 r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \sum q_i \tag{4.1}$$

где: $\mathbf{E}$ – напряженность электрического поля; $\mathbf{n}^{\mathrm{o}}$ – единичная нормаль к поверхности; q_i – i-ый заряд системы внутри сферы радиуса a; V – объем, внутри которого расположена сфера радиуса а с зарядами.

Ясно, что поперечное электрическое поле векторного потенциала $\mathbf{A}_1$ не будет вносить свой вклад в продольную составляющую электрического поля в интеграле Гаусса. Поэтому при $r \to \infty$ мы можем рассматривать только продольные компоненты электрического поля, обусловленные потенциалами $\mathbf{A}_2$ и ϕ.

$$\mathbf{E}_L = -\frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial t} - \mathrm{grad}\phi \tag{4.2}$$

Сравнивая выражения (4.1) и (4.2), можно установить закон убывания продольного электрического поля.

$$\varepsilon E_L 4\pi r^2 \approx \sum q_i \tag{4.3}$$

Из выражения (4.3) следует:

$$E_L \approx \frac{\sum q_i}{4\pi\varepsilon r^2} \tag{4.4}$$

Таким образом, если сумма зарядов внутри сферы радиуса а не равна нулю, то поле убывает на бесконечности как r^{-2}. Если же суммарный заряд равен нулю, и заряды образуют мультиполь высокого порядка, тогда продольное электрическое поле может убывать еще быстрее.

Компенсация продольных волн

Теперь мы возвратимся к уравнениям (3.17) – (3.19) и Таблице 1. Поля, описываемые волновыми уравнениями, убывают, в общем случае, как

r^{-1}. Например, поля, осциллирующие с частотой ω, убывают как $\exp(-ikr)/r$, где k – волновое число. Таким образом, мы сталкиваемся с противоречием. С одной стороны, продольное электрическое поле должно убывать не медленнее, чем r^{-2}, с другой – продольное электрическое поле может убывать как r^{-1}..

Естественно предположить, что плотности потоков $\mathbf{S}_2$ и $\mathbf{S}_3$ и плотности энергий w_2 и w_3 должны компенсировать друг друга при $r \to \infty$.

Запишем два интеграла:

$$\Pi = \oiint \mathbf{S}\,\mathbf{r} r \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \qquad (4.5);$$

$$\Delta W = \Delta r \iint w r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \qquad (4.6),$$

где: П – общий поток электромагнитной энергии через поверхность сферы, окружающей источники; ΔW – плотность энергии в тонком сферическом слое Δr как показано на рис. 1.

$$\mathbf{S} = -\frac{1}{\mu}[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \times \mathrm{rot}\mathbf{A} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\mathrm{div}\mathbf{A}] - \eta\varepsilon\frac{\partial \phi}{\partial t}\mathrm{grad}\phi \qquad (4.7)$$

$$w = \frac{1}{2\mu}[(\mathrm{rot}\mathbf{A})^2 + (\mathrm{div}\mathbf{A})^2 + (\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial ct})^2] + \eta\frac{\varepsilon}{2}[(\mathrm{grad}\phi)^2 + (\frac{\partial \phi}{\partial ct})^2] \qquad (4.8)$$

η – некоторое число, равное по модулю 1; знак η мы установим позже.

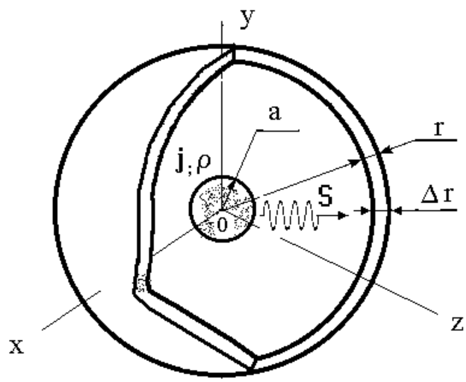

Рис. 1.

Представим векторный потенциал **A** в виде суммы (3.4) и предположим, что источники расположены внутри сферы радиуса a (r >> a). Рассмотрим потенциалы на поверхности сферы радиуса r. Здесь мы можем использовать условия ортогональности полей (3.5), когда $r \to \infty$.

Интегралы (4.5) и (4.6) можно разделить на две независимых группы

$$\Pi_T = \lim_{r\to\infty} -\oiint [\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} \times \mathrm{rot}\mathbf{A}_1]\mathbf{r}\, r \sin\theta\, d\theta\, d\varphi;$$
$$\Delta W_T = \lim_{r\to\infty} \iint \Delta r \frac{1}{2\mu}[(\mathrm{rot}\mathbf{A}_1)^2 + (\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial ct})^2] r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \tag{4.9}$$

$$\Pi_L = \lim_{r\to\infty} -\iint [\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial t}\mathrm{div}\mathbf{A}_2 + \eta\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}\mathrm{grad}\phi]\mathbf{r}\, r \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 0$$
$$\Delta W_L = \lim_{r\to\infty} \iint \Delta r \{\frac{1}{2\mu}[(\mathrm{div}\mathbf{A}_2)^2 + (\frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial ct})^2] + \tag{4.10}$$
$$+ \eta\frac{\varepsilon}{2}[(\mathrm{grad}\phi)^2 + (\frac{\partial \phi}{\partial ct})^2]\} r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 0$$

где: Π_T и Π_L – потоки, соответствующие поперечным и продольным волнам; ΔW_T и ΔW_L – энергии в тонком слое Δr соответственно для поперечных и продольных волн.

Поперечные волны уносят энергию в бесконечность и интегралы (4.9) не равны нулю.

Поток и энергия продольных волн (4.10) должны быть равны нулю благодаря компенсации. Оба выражения (4.10) удовлетворяются одновременно, если подынтегральные выражения равны нулю.

$$\lim_{r\to\infty} r\,\mathbf{r}\,[-\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial t}\mathrm{div}\mathbf{A}_2 - \eta\,\varepsilon\frac{\partial \phi}{\partial t}\mathrm{grad}\phi] = 0 \qquad (4.11)$$

$$\lim_{r\to\infty} r^2\{\frac{1}{2\mu}[(\mathrm{div}\mathbf{A}_2)^2 + (\frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial ct})^2] + \eta\frac{\varepsilon}{2}[(\mathrm{grad}\phi)^2 + (\frac{\partial \phi}{\partial ct})^2]\} = 0 \qquad (4.12)$$

Мы видим, что выражение в квадратных скобках уравнения (4.12) всегда положительно. Следовательно, оно может равняться нулю только при $\eta = -1$.

С учетом этого условия, два выражения (4.11) и (4.12) легко преобразуются к следующему виду.

$$\begin{aligned} &\lim_{r\to\infty} r\,\mathbf{r}\,\varepsilon\frac{\partial \phi}{\partial t}[-\frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial t} - \mathrm{grad}\phi] = 0; \\ &\lim_{r\to\infty} r^2\frac{\varepsilon}{2}[-\frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial t} - \mathrm{grad}\phi][-\frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial t} + \mathrm{grad}\phi] = 0 \end{aligned} \qquad (4.13)$$

Из выражения (4.13) следует, что оба уравнения одновременно равны нулю, когда:

$$\lim_{r\to\infty}\mathbf{r}\,\mathbf{E}_{\mathrm{L}} = \lim_{r\to\infty}\mathbf{r}\,[-\frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\phi] = 0 \qquad (4.14)$$

где $\mathbf{E}_{\mathrm{L}}$ – напряженность продольного электрического поля (4.4).

Выражение (4.14) всегда справедливо в силу условия (4.4). Итак, **продольные волны** скалярного и векторного потенциалов, описываемые волновыми уравнениями, **могут компенсировать друг друга при r→∞** тогда и только тогда, когда плотность потока и плотность энергии поля скалярного потенциала и соответствующие плотности продольного векторного потенциала имеют **противоположные знаки.**

Мы выяснили физическую причину отрицательного знака энергии и потока поля скалярного потенциала. При одинаковых знаках компенсация продольных волн невозможна.

Свойства калибровок

Калибровка Лоренца

Теперь мы можем обсудить особенности упомянутых выше калибровок. Мы видим, что калибровка Лоренца описывает продольные электрические волны скалярного и векторного потенциалов. Эти волны взаимно гасят друг друга на бесконечности и, в результате, их энергия не уносится в бесконечность. Однако вблизи источника излучения продольные электрические поля, определяемые запаздывающими потенциалами, существуют.

Мы выяснили также, что описание *квазистатических явлений* в рамках калибровки Лоренца *невозможно*, поскольку предельный переход при $c \to \infty$ не является математически законной операцией. Более того, даже если бы такой переход и существовал, описание квазистатических явлений натолкнулось бы на непреодолимые трудности. Энергия поля заряженной частицы будет отрицательной, и мы стаолкнемся с нарушением закона Кулона: *одноименные заряды должны притягиваться, разноименные – отталкиваться,* а энергия заряженного конденсатора будет иметь отрицательный знак (!). Конечно, можно попытаться исправить положение, изменив знак функции Лагранжа. Но при этом мы столкнулись бы с другой трудностью: энергия электромагнитных волн, излучаемая антенными системами, будет иметь отрицательный знак (!). Таким образом, калибровка Лоренца дает ***противоречивое*** описание явлений электродинамики.

Кулоновская калибровка

Рассмотрим теперь кулоновскую калибровку. Благодаря тому, что правая часть уравнения для векторного потенциала содержит только соленоидальные источники, продольные волны запаздывающего потенциала ***отсутствуют*** даже вблизи источника излучения электромагнитных волн. Проблема *компенсации* продольных волн не возникает. Более того, энергия поля скалярного потенциала положительна и закон Кулона не нарушается. Тем не менее, кулоновская калибровка также имеет трудности. В рамках этой калибровки *мы не можем* описывать ***квазистатические магнитные явления.***

Причина та же. Мы не имеем права использовать предельный переход $c \to \infty$ для волнового уравнения векторного потенциала **A.**

Таким образом, эти калибровки не могут быть использованы для описания ***квазистатических*** явлений в рамках классической электродинамики. Те же проблемы существуют и для уравнений Максвелла в их стандартной форме.

Заключение

Итак, мы установили следующее.

1. Волновое уравнение **не имеет единственного решения** задачи Коши. Существуют *прямое решение* волнового уравнения и *параллельные* решения. Решение зависит от выбора калибровки волнового уравнения. Если выбранная калибровка зафиксирована, решение задачи Коши единственно.

2. Различные калибровки уравнений дают, в общем случае, различные решения задачи Коши. **Калибровочная инвариантность,** вообще говоря***, не имеет места***.

3. Предельный переход при $c \to \infty$ **не** всегда **является законным**.

4. Электромагнитные потенциалы играют важную роль в электродинамике. Поэтому поиск той *единственной* калибровки уравнений Максвелла, которая соответствовала бы результатам экспериментальных исследований физических явлений, крайне необходим. Возможно, это будет связано с пересмотром уравнений классической электродинамики.

5. Остается нерешенной проблема ковариантности уравнений электродинамики, т.е. поиск преобразования, которое связывало бы потенциалы и поля в различных системах отсчета.

Таковы формальные выводы. Остается удивительным тот факт, что уравнения Максвелла с успехом используются до сих пор. Можно предположить, что имеют место следующие причины. Во-первых, те расхождения между теорией и экспериментом, с которыми встречаются исследователи, либо не публикуются (отклоняются редакционными коллегиями), либо истолковываются как ошибки эксперимента самими исследователями. Во вторых, задачи, связанные с излучением электромагнитных волн, как правило, очень редко пересекаются с задачами описания квазистатических явлений электродинамики. Однако, там, где они пересекаются, возникают проблемы и трудности (электромагнитная масса заряда, реакция излучения ускоренного заряда и другие).

Выход мы видим в ***раздельном*** описании волновых полей и полей зарядов, поскольку свойства квазистатических полей зарядов и волновых полей различны. Более того, мы предполагаем, что требование ковариантности ***любых*** полей относительно преобразования Лоренца – слишком жесткое требование. Преобразование Лоренца ***не универсально*** и каждое из упомянутых полей, обладая своими специфическими свойствами, может удовлетворять каким-то ***своим*** **преобразованиям**.

Более жесткое заключение – следующее. Преобразование Лоренца потеряло поддержку со стороны электродинамики. Оно должно уступить свое место преобразованию Галилея. Наша мысль подкрепляется значительным количеством книг и статей, посвященных критике Специальной теории относительности с позиции теории и эксперимента (см., например, [7], [8], [9] и т.д.).

Приложение 1

До настоящего времени считалось, что задача Коши для волнового уравнения имеет единственное решение. В силу этого делался закономерный вывод о независимости решения от выбора калибровки. Иными словами, решения в рамках калибровки Лоренца и в рамках кулоновской калибровки считались эквивалентными.

Теперь мы должны показать, что такой вывод не законен. Рассмотрим уравнения Максвелла в кулоновской калибровке (2.6).

$$\Delta\mathbf{A}_w - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}_w}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}\phi_{ins};\ \Delta\phi_{ins} = -\frac{\rho}{\varepsilon};\mathrm{div}\mathbf{A}_w = 0 \qquad (A.1)$$

Решение этих уравнений должно содержать поле мгновеннодействующего потенциала φ_{ins}, т.е. поле $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\varphi_{ins}$.

В [3] и [4] утверждается, что часть поля векторного потенциала $-\frac{\partial\mathbf{A}_w}{\partial t}$ компенсирует эту мгновеннодействующую составляющую напряженности поля $-\mathrm{grad}\varphi_{ins}$ во всем свободном пространстве. Чтобы показать ошибочность этого заключения, преобразуем правую часть векторного уравнения, используя уравнение непрерывности для скалярного потенциала

$$\mathrm{div}\mathbf{v}\phi_{ins} + \frac{\partial\phi_{ins}}{\partial t} = 0 \qquad (A.2)$$

Будем для простоты считать, что скорость заряда **v** постоянна.

В результате правая часть векторного уравнения из (А.1) примет вид:

$$\begin{aligned} -\mu\mathbf{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}\phi_{ins} &= -\mu\,\rho\mathbf{v} - \frac{1}{\mathrm{c}^2}\mathrm{grad}\frac{\partial\phi_{ins}}{\partial t} = \\ &= \mu\varepsilon\,\mathbf{v}\Delta\phi_{ins} - \mu\varepsilon\mathrm{grad}\mathrm{div}\mathbf{v}\phi_{ins} = \frac{1}{c^2}\mathrm{rot}\mathrm{rot}\mathbf{v}\phi_{ins} \end{aligned} \qquad (A.3)$$

Компенсация поля $-\mathrm{grad}\varphi_{ins}$ полем $-\frac{\partial\mathbf{A}_w}{\partial t}$ невозможна по следующим причинам. Во-первых, правая часть уравнения для векторного потенциала пропорциональна v/c. Следовательно, при v/c равном или близком к нулю мы не можем иметь полную компенсацию. Во вторых, источник поля векторного потенциала (правая часть уравнения (А.3)) имеет соленоидальный характер. Он может создавать только соленоидальный векторный потенциал **A**. Попытка создать в свободном пространстве поле ***полярного*** **вектора**, используя только источники ***соленоидальных*** **полей,** бессмысленна.

Иногда говорят, что компенсация мгновеннодействующего поля следует непосредственно из *градиентной инвариантности*, связывающей кулоновскую калибровку с калибровкой Лоренца. Рассмотрим и этот подход.

Как известно, напряженности электрического **E** и магнитного поля **H** сохраняют свои значения при следующем преобразовании

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f; \quad \phi' = \phi - \frac{\partial f}{\partial t} \tag{A.4}$$

где: **A** и φ исходные электромагнитные потенциалы; **A**' и φ' новые электромагнитные потенциалы; f есть некоторая функция (калибровочный потенциал), удовлетворяющая однородному волновому уравнению:

$$\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \tag{A.5}$$

Очевидно, что калибровочный потенциал f не является мгновеннодействующим.

Запишем уравнения Максвелла в калибровке Лоренца.

$$\Delta \mathbf{A}_w - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}_w}{\partial t^2} = -\mu\, \mathbf{j}; \; \Delta\phi_w - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi_w}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}; \; \operatorname{div}\mathbf{A}_w + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi_w}{\partial t} = 0 \tag{A.6}$$

Чтобы получить из этих уравнений уравнения Максвелла в кулоновской калибровке, вводят условие $f = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$. Используя это условие и выражение (A.4), подставим **A** и φ, выраженные через **A**' и φ'.

В результате мы получим:

$$\Delta\, \mathbf{A}'_w - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}'_w}{\partial t^2} = -\mu\, \mathbf{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t} grad\phi'_{ins}; \; \Delta\, \phi'_w = -\frac{\rho}{\varepsilon}; \; \operatorname{div}\mathbf{A}'_w = 0 \tag{A.7}$$

Казалось бы, что теперь мы действительно имеем дело с кулоновской калибровкой. В действительности мы должны помнить, что потенциал f и, следовательно, потенциалы φ'_w и φ_w должны быть решениями однородного волнового уравнения (см. (A.5)).

$$\Delta f_w - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f_w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta\phi_w - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi_w}{\partial t^2}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta\phi'_w - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi'_w}{\partial t^2}\right) = 0 \tag{A.8}$$

Это противоречит уравнению Пуассона для скалярного потенциала (A.7):

$$\Delta \phi'_w = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (A.9)$$

Уравнения (А.8) и (А.9) ***несовместны***. Следовательно, кулоновская калибровка **не является следствием** калибровки Лоренца. Градиентная инвариантность **не имеет места**. Этот вывод имеет принципиальное значение и для квантовой электродинамики.

Литература

1. А.Н. Тихонов. А.А. Самарский. Уравнения математической физики. – М.: ГИФМЛ, 1954.
2. В А. Кулигин. Причинность и взаимодействие в физике // Детерминизм в современной науке. Воронеж, 1987.
3. В.Л. Гинзбург. Теоретическая физика и астрофизика. М.: ГИФМЛ, 1987.
4. Д. Джексон. Классическая электродинамика. М.: Мир. 1965.
5. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля. М; Физматгиз, 1961.
6. V.A.Kuligin, G.A.Kuligina, M.V.Korneva. The electromagnetic mass of a charged particle. Apeiron, vol. 3, №1, 1996.
7. V.A.Kuligin, G.A.Kuligina, M.V.Korneva. Epistemology and Special Relativity. Apeiron, (20:21). 1994
8. B.G. Wallace. Radar testing of the relative velocity of light in space. *Spectroscope Letters,* vol. 2, №12, 1969.
9. H.C. Hayden. Stellar aberration. *Galilean Electrodynamics*, vol. 4, №5, 1993.

Об авторах:

Исследовательская группа «Анализ», http://www.n-t.org/ac/iga/

e-mail: kuligin@el.main.vsu.ru

Ранее опубликовано:

Международный Конгресс-2000 «Фундаментальные проблемы естествознания и техники». С.-Петербург, 2...8 июля 2000 г.

Дата публикации:

17 сентября 2001 года