Кризис релятивистских теорий

Виктор КУЛИГИН, Галина КУЛИГИНА, Мария КОРНЕВА
Исследовательская группа «Анализ»

Часть 4.
Вариационный принцип релятивистских теорий

Показано, что релятивистский интеграл действия не имеет экстремумов. Благодаря этому факту надежных уравнений движения и законов сохранения не существует в рамках релятивистских представлений.

It is shown that relativity action integral has no extremums. Owing to the fact effective equations of motion and reliable laws of conservation are not exist in framework of Relativity theories.

Введение

В современной физической литературе очень часто говорится о «блестящем математическом формализме», положенном в основу релятивистских теорий и, в частности, в основу Специальной теории относительности (СТО). Механика СТО разрабатывалась как обобщение принципа Гамильтона для 4-пространства. Главная цель Части 4 – провести математический анализ этого обобщения. Чтобы упростить анализ и показать читателям ясную картину проблемы, мы будем использовать только Декартовы координаты.

Классический интеграл действия

Мы начнем с краткого описания классического интеграла действия, чтобы затем использовать его для сравнения с релятивистским интегралом действия. Классический интеграл действия имеет следующий вид:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{r}, \mathbf{v})dt \qquad (1.1)$$

где $L = K - U$ – функция Лагранжа для частицы, на которую действует внешнее поле; K – кинетическая энергия частицы и U – потенциальная энергия взаимодействия.

Интеграл действия имеет минимум, если интегрирование ведется вдоль траектории частицы. Другими словами, вариация интеграла действия δS, должна быть равна нулю вдоль ее траектории. Чтобы определить траекторию частицы мы должны получить из интеграла действия уравнение ее движения (уравнение Эйлера). Это уравнение ищется путем варьирования координаты частицы $\mathbf{r}$ так, чтобы выполнялось условие минимума интеграла действия (1.1): $\delta S = 0$. При этом время t рассматривается как постоянный параметр: $\delta t = 0$. Окончательная форма вариации интеграла действия имеет вид:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) \delta \mathbf{v} dt \tag{1.2}$$

Поскольку $\delta \mathbf{r}$ это произвольная переменная, условие $\delta S = 0$ выполняется, если равно нулю подынтегральное выражение.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \tag{1.3}$$

Известно, что уравнение (1.3) есть уравнение движения частицы. Интеграл действия имеет минимум, если траектория частицы описана этим уравнением.

Интеграл действия в Специальной Теории относительности

Исторически математический формализм релятивистской механики строился по образу и подобию формализма классической, опираясь на принцип соответствия между релятивистской и классической механиками при $v \ll c$ и принцип наименьшего действия. При этом, по утверждению апологетов теории относительности, форма математических операторов и уравнений в релятивистской механике сохраняется, а при $v \ll c$ релятивистская механика должна переходить в классическую. Поэтому форма релятивистского интеграла действия должна быть подобна (1.1).

$$S = \frac{1}{c}\int_{s_1}^{s_2} L(x_i, u_i)ds \qquad (2.1)$$

где: L – функция Лагранжа для частицы, на которую действует внешнее поле; c – скорость света; x_i – 4-координата частицы (ict, x, y, z); u_i – 4-вектор скорости частицы.

$$ds = \sqrt{-(dx_i)^2} = \sqrt{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} \qquad (2.2)$$

Известно, что 4-координата x_i зависит от s, и при дифференцировании ее по s мы имеем 4-скорость частицы.

$$x_i = x_i(s), \quad u_i = \frac{dx_i}{ds} = u_i(\mathrm{s}) \qquad (2.3)$$

Таким образом, параметр s должен играть ту же роль, что и параметр t в классической теории.

Изучая литературу, мы столкнулись с двумя вариантами построения интеграла действия релятивистской механики, которые будут рассмотрены ниже.

Первый вариант. Он изложен в [1], [2]. Здесь параметр s подобен параметру t в классической механике. При варьировании интеграла действия он остается неизменным ($\delta ds = 0$). В результате мы имеем уравнение движения частицы по форме полностью соответствующее классическому уравнению (1.3) (Приложение 1).

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial u_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} \qquad (2.4)$$

Итак, внешняя форма соблюдена, и мы можем рассмотреть ее содержание на конкретном примере. Авторы [2] для заряда в магнитном поле предлагают следующее выражение функции Лагранжа:

$$L = \frac{m_0c^2u_i^2}{2} + eu_iA_i \qquad (2.5)$$

где: e и m заряд и масса заряда соответственно; A_i – 4-потенциал электромагнитного поля.

Используя уравнение (2.4), нетрудно найти следующее уравнение движения для заряда:

$$\frac{d}{ds}\left(m_0 c^2 u_i\right) = e\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i}\right)u_k \tag{2.6}$$

Это и есть релятивистское уравнение движения, которое при $v << c$ переходит в известное классическое уравнение:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathrm{grad}\phi - e\frac{d\mathbf{A}}{dt} + e\mathbf{v}\times\mathrm{rot}\mathbf{A},$$

где **A** и φ – потенциалы электромагнитного поля; **v** – скорость заряда.

Казалось бы, все прекрасно, но существует обстоятельство, свидетельствующее не в пользу этого варианта. В СТО есть одно важное тождество

$$(u_i)^2 + 1 = u_t^2 - u_x^2 - u_y^2 - u_z^2 + 1 = 0 \tag{2.7}$$

Учитывая это соотношение, можно показать, что выражение (2.5) фактически *не соответствует* своему классическому аналогу.

$$L_1 = -\frac{m_0 c^2}{2} + e u_i A_i = L \tag{2.8}$$

Очевидно, что из него мы не можем получить уравнение движения (2.6).

Более того, мы можем записать много других новых функций Лагранжа, которые равны предшествующей функции Лагранжа (2.5), и из них мы можем получить много других различных уравнений движения. Например, пусть функция Лагранжа равна:

$$\begin{aligned} L_2 = \frac{1}{2} m_0 c^2 u_i^{2K} (-1)^{K+1} + e u_i^{2N+1} (-1)^N A_i + \left(u_i^2 + 1\right)\Phi(x_i, u_i) = \\ = L = \frac{m_0 c^2 u_i^2}{2} + e u_i A_i \end{aligned} \tag{2.9}$$

где: N и K – положительные целые числа (N, K = 0; 1; 2;...); Φ (x_i; u_i) – произвольная скалярная функция.

Теперь уравнение движения будет отлично от (2.6).

$$\frac{d}{ds}\left[m_0 c^2 Ku + 2NeA_i + 2\Phi(x_i, u_i)u_i\right] = \mathrm{e}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_m} - \frac{\partial A_m}{\partial x_i}\right)u_m \tag{2.10}$$

Итак, мы можем получить *много различных* уравнений движения, изменяя K, N и Ф. Почему – это имеет место?

Возможно, что переменная s в СТО не может рассматриваться как независимая переменная подобно t в механике Ньютона. С одной стороны, s зависит от x_i (2.2), с другой, x_i должен зависеть от s (2.3). Благодаря этому, требование для вариационного исчисления нарушено. Как результат, рассмотренный вариант не может служить основой для математического формализма СТО.

Помимо этого, мы не можем получить классический интеграл действия при условии $v \ll c$. Мы, например, имеем:

$$S = \frac{1}{c}\int_{s_1}^{s_2}\left(\frac{m_0 c^2 u_i^2}{2} + eu_i A_i\right)ds \cong \int_{\mathbf{t_1}}^{\mathbf{t_2}}\left(\frac{m_0 v^2}{4} - e\varphi + \mathrm{e}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\right)dt \tag{2.11}$$

Кинетическая энергия в 2 раза меньше необходимой.

Итак, первый вариант имеет следующие трудности:

1. Предельный переход от релятивистского интеграла действия к классическому не имеет места.
2. В отличие от классической механики релятивистский интеграл действия дает множество различных уравнений движения и неизвестно: какое из них отвечает объективной реальности?

Второй вариант. Другая версия интеграла действия приводится в учебнике [3]. Авторы [3] учитывают, что s зависит от x_i. Они дают новый интеграл действия:

$$S = \frac{1}{c}\int_{s_1}^{s_2}(-m_0 c^2 ds + eA_i dx_i) = \frac{1}{c}\int_{s_1}^{s_2}(-m_0 c^2 + eA_i u_i)ds = \frac{1}{c}\int_{s_1}^{s_2} L ds \tag{2.12}$$

Теперь правильный классический предел имеет место:

$$S = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{m_0 v^2}{2} - e\varphi + e\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\right)dt \tag{2.13}$$

Однако здесь мы сталкиваемся с другой проблемой. Новая общая форма уравнения движения отличается от классической (см. Приложение 1). Более того, нарушение единственности решения также имеет место

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial u_i} - Lu_i + \frac{\partial L}{\partial u_k}u_k u_i\right) = \frac{\partial L}{\partial x_i} \tag{2.14}$$

Итак, второй вариант также имеет трудности:

1. Основная форма уравнения движения отличается от классической.

2. Мы имеем бесконечный ряд уравнений движения.

Ортогональность, но не произвольность

Чтобы понять причины неудач релятивистского обобщения интеграла действия, рассмотрим общий вид вариации интеграла действия для двух вариантов.

Первый вариант [1], [2]. Он определяется условием $\delta ds = 0$.

$$\delta S = \delta\int_{s_1}^{s_2} Lds = \int_{s_1}^{s_2} \delta Lds = \int_{s_1}^{s_2} \frac{dL}{ds}\delta s ds \tag{3.1}$$

где $\dfrac{dL}{ds} = \dfrac{\partial L}{\partial u_i}\dfrac{du_i}{ds} + \dfrac{\partial L}{\partial x_i}u_i + \dfrac{\partial L}{\partial s}$

Проинтегрируем выражение (3.1) по частям.

$$\delta S = L\delta s\Big|_{s_1}^{s_2} - \int_{s_1}^{s_2} Ld\delta s = 0 \tag{3.2}$$

Первый член правой части равен нулю, поскольку концы траектории s_1 и s_2 жестко фиксированы и вариация в этих точках равна нулю по условиям вариации. Интеграл также равен нулю в силу соотношения $\delta ds = 0$.

Отсюда следует, что интеграл действия не имеет экстремумов. Его значение зависит только от пределов интегрирования и не зависит от формы траектории частицы. *Принцип наименьшего действия не имеет места*.

Второй вариант [3]. В этом варианте вариация $\delta ds \neq 0$. Запишем вариацию интеграла действия для этого варианта.

$$\delta S = \delta \int_{s_1}^{s_2} L ds = \int_{s_1}^{s_2} \left(\delta L ds + L \delta ds\right) = \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{dL}{ds} \delta s ds + L \delta ds \right) \tag{3.3}$$

Как и в предыдущем случае, мы проинтегрируем первый член в интеграле действия по частям.

$$\delta S = L\delta s\Big|_{s_1}^{s_2} + \int_{s_1}^{s_2} (-Ld\delta s + Ld\delta s) = 0 \tag{3.4}$$

Очевидно, что первый член правой части равен нулю по указанным ранее причинам, а второй тождественно равен нулю по результату интегрирования. Следовательно, для второго варианта справедливы те же выводы. Интеграл действия для второго варианта не имеет экстремумов. Его значение зависит только от пределов интегрирования и не зависит от формы кривой. *Принцип наименьшего действия не имеет места*.

Теперь нам необходимо понять причину постоянства интеграла действия. Рассмотрим изменение длины отрезка x_i при бесконечно малой вариации δx_i и $\delta s_{(i)} = \sqrt{-(\delta x_i)^2} \neq 0$.

$$x_k = x_i + \delta x_i \tag{3.5}$$

Вычислим длину отрезков.

$$s_{(k)} = s_{(i)} - x_i \delta x_i \tag{3.6}$$

С другой стороны, изменение 4-отрезка в рамках преобразования Лоренца не может быть произвольным. Существует жесткое условие:

$$x_k = \alpha_{ki} x_i \tag{3.7}$$

где αk_i – матрица преобразования Лоренца.

Из (3.7) следует, что длины сравниваемых отрезков должны быть равны друг другу, т.е. $s(k) = s(i)$.

Сравнивая это соотношение с выражением (3.6), получим $x_i\delta x_i = 0$. Иными словами, вариация δx_i всегда должна быть ортогональна 4-вектору x_i. Это соответствует обычному повороту 4-вектора в 4-пространстве или переходу 4-вектора из одной инерциальной системы отсчета в другую.

Пределы интегрирования s_1 и s_2 представляют собой две концентрических 4-поверхности, в которую «упираются» концы траектории частицы. При варьировании траектории эти концы свободно скользят по указанным поверхностям. В классическом интеграле действия концы траектории жестко «зафиксированы» в точках t_1 и t_2.

Математический формализм Специальной теории относительности часто именуют «*теорией инвариантов»*. Именно релятивистские инварианты должны быть слагаемыми релятивистской функции Лагранжа. Как известно, любой инвариант сохраняет неизменным свое значение при повороте в 4-пространстве (при переходе из одной инерциальной системы в другую). Следовательно, вариация любого инварианта, образованного 4-вектором, всегда *ортогональна* этому 4-вектору. Например, вариация квадрата 4-вектора скорости (инвариант) равна нулю.

$$\delta u_i^2 = 2u_i\delta u_i = 2\delta(-1) = 0$$

Таким образом, изменение релятивистского интеграла действия всегда равно нулю не в силу произвольности вариации, а в силу ортогональности 4-вариации уравнению движения. Это справедливо для *каждого* варианта.

Чтобы подтвердить этот вывод, запишем из [3] конечное выражение, из которого получают формулу Лоренца.

$$\delta S = \int_{s_1}^{s_2}\left[-mc\frac{du_i}{ds} + e\left(\frac{dA_k}{dx_i} - \frac{dA_i}{dx_k}\right)\right]\delta x_i ds = \int_{s_1}^{s_2}\left[-mc\frac{du_i}{ds} + e\left(\frac{dA_k}{dx_i} - \frac{dA_i}{dx_k}\right)\right]u_i\delta s ds \qquad (3.8)$$

Убедимся, что вариация интеграла равна нулю не в силу произвольности δx_i.= u_i δs, а в силу ортогональности уравнения движения (выражение в квадратных скобках) и δx_i.

$$
\begin{aligned}
&a)\ -mc\frac{du_i}{ds}u_i = -mc\frac{d(u_i)^2}{2ds} = mc\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \\
&b)\ e\left(\frac{dA_k}{dx_i} - \frac{dA_i}{dx_k}\right)u_i u_k = e\left(\frac{dA_k}{dx_i}u_i u_k - \frac{dA_i}{dx_k}u_i u_k\right) = \left(\frac{dA_i}{dx_k}u_i u_k - \frac{dA_i}{dx_k}u_i u_k\right) = 0
\end{aligned}
\qquad (3.9)
$$

В выражение (3.9) входят скалярные слагаемые, и мы имеем право заменить одновременно индексы i на k, а k на i в первом слагаемом. Именно благодаря ***ортогональности*** мы получаем счетное множество уравнений движения, поскольку к любому уравнению движения мы можем добавить любой член, ортогональный к δx_i. Вариация интеграла действия от этой процедуры не изменится и будет всегда равна нулю.

Обобщение. Рассмотренные выше выводы оказываются справедливыми и для интегралов действия, использующих плотность функции Лагранжа для получения уравнений полей.

$$
S = \frac{1}{ic}\int \Lambda\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k}; A_i; \ldots\right) d\Omega \qquad (3.10)
$$

где: Λ – плотность функции Лагранжа; $d\Omega$ – элементарный 4-объем ($dx \cdot dy \cdot dz \cdot icdt$).

Как мы писали выше, вариация любого инварианта, входящего в функцию Лагранжа, всегда *ортогональна* к вектору, образующему инвариант. Приведем примеры. Инвариант мы будем обозначать символом I.

$$
\begin{aligned}
&I_1 = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right)^2; \qquad \delta\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right)^2 = 2\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\delta\frac{\partial A_i}{\partial x_k} = \delta I_1 = 0 \\
&I_2 = F_{ik}^2; \qquad \delta F_{ik}^2 = 2F_{ik}\delta F_{ik} = \delta I_2 = 0
\end{aligned}
\qquad \text{и т.д.}
$$

где F_{ik} – тензор электромагнитного поля.

Неоднозначность уравнений движения можно проиллюстрировать, сравнивая вариацию одного и того же инварианта в разных формах его записи.

$$
\begin{aligned}
&I = j_k A_k; \qquad \delta I = j_k \delta A_k = 0 \\
&I = 5 j_k A_k - 4I; \qquad \delta I = 5 j_k \delta A_k - 4\delta I = 5\, j_k \delta A_k = 0
\end{aligned}
$$

где j_k не зависит от A_k.

Мы видим различные коэффициенты при произведении $j_k\ \delta A_k$.

Следовательно, уравнения для электромагнитных и гравитационных полей, которые были получены с помощью релятивистского принципа наименьшего действия, *неоднозначны,* а потому весьма сомнительны. «Блестящий математический формализм», которым всегда так гордились апологеты релятивистских теорий, на деле оказывается некорректным. Он напоминает «***блестящий мыльный пузырь»*** благодаря математическим, физическим и гносеологическим ошибкам.

Заключение

Вариация интеграла действия равна нулю в двух случаях. Во-первых, когда интегрирование идет вдоль экстремали, определяемой уравнением движения Эйлера. В этом случае интеграл имеет экстремум. Во вторых, когда величина интеграла постоянна. Она не зависит от пути интегрирования, а определяется только пределами интегрирования. Первый случай реализован в классической механике Ньютона. Второй – в релятивистских теориях.

Используя релятивистский интеграл действия и релятивистский принцип наименьшего действия, мы получаем счетное множество уравнений движения, и нет критерия, который бы позволил определить, какое уравнение отвечает физическим явлениям.

Используя этот интеграл и этот принцип, мы не можем достоверно сформулировать законы сохранения для релятивистской механики.

С помощью этого принципа невозможно получить единственные и надежные уравнения для электромагнитных и гравитационных полей.

Теории, опирающиеся на этот принцип, мягко говоря, сомнительны. Это релятивистская механика и электродинамика, Специальная и Общая теория относительности, различные струнные теории и т.д.

Учитывая гносеологические ошибки, внесенные Специальной теорией относительности А.Эйнштейна, мы можем сказать, что релятивистские теории представляют собой *псевдонаучную эклектику*.

Примечание. В работе [4] имеются ошибки. К счастью, они не имеют принципиального значения и не влияют на конечные выводы. В этой работе они исправлены.

Приложение 1.
Доказательство нового уравнения движения

Рассмотрим **первый** вариант. [1], [2].

$$\delta S = \int_{s_1}^{s_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial L}{\partial u_i} \delta u_i \right] ds = 0 \tag{A.1}$$

Учитывая, что $\delta ds = 0$, найдем

$$\delta u_i = \delta(dx_i / ds) = (ds\delta dx_i - dx_i \delta ds) / ds^2 = \delta dx_i / ds \tag{A.2}$$

Теперь, после интегрирования выражения (A.1) по частям, получим

$$dS = \frac{\partial L}{\partial u_i} \delta x_i \bigg|_{s_1}^{s_2} - \int_{s_1}^{s_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial u_i} \right] \delta x_i ds = 0 \tag{A.3}$$

Первый член в правой части равен нулю, поскольку концы траектории закреплены и вариация в конечных точках должна быть равна нулю. В силу произвольности δx_i выражение в квадратных скобках под интегралом должно быть равно нулю.

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial u_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} \tag{A.4}$$

Это есть уравнение движения для первого варианта.

Теперь рассмотрим **второй** вариант [3].

Запишем вариацию интеграла действия для этого случая.

$$\delta S = \int_{s_1}^{s_2} (ds\delta L + L\delta ds) = \int_{s_1}^{s_2} \left[ds \frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i + ds \frac{\partial L}{\partial u_i} \delta u_i + L\delta ds \right] = 0 \tag{A.5}$$

Сначала мы сделаем следующие промежуточные вычисления

а) $$\delta ds = -dx_i \delta dx_i / ds = -u_i \delta dx_i \tag{A.6}$$

б) $$\begin{aligned} \delta u_i &= \delta(dx_i / ds) = (ds\delta dx_i - dx_i \delta ds)/ds^2 = \\ &= (ds\delta dx_i + dx_i dx_k \delta dx_k)/ds^2 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Учитывая (А.6) и (А.7), получим:

$$\delta S = \int_{s_1}^{s_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i ds + \left(\frac{\partial L}{\partial u_i} + \frac{\partial L}{\partial u_k} u_k u_i - L u_i \right) \delta dx_i \right] = 0 \tag{A.8}$$

После интегрирования выражения в круглых скобках в (А.8) по частям находим уравнение движения:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial u_i} + \frac{\partial L}{\partial u_k} u_k u_i - L u_i \right) = \frac{\partial L}{\partial x_i} \tag{A.9}$$

Литература

1. Г. Голдштейн. Классическая механика. – М.: Наука, 1975.
2. В.К. Пановски, М. Филлипс. Классическая электродинамика. – М: Мир, 1975.
3. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля. – М: Физматгиз, 1961.
4. В.А. Кулигин. Интеграл действия релятивистской механики./ Проблемы пространства, времени, тяготения. С.-Петербург.: Политехника, 1997.

Об авторах:

Исследовательская группа «Анализ», http://www.n-t.org/ac/iga/

e-mail: kuligin@el.main.vsu.ru

Ранее опубликовано:

Международный Конгресс-2000 «Фундаментальные проблемы естествознания и техники». С.-Петербург, 2...8 июля 2000 г.

Дата публикации:

30 сентября 2001 года

Электронная версия: