Ангармонические колебания математического маятника.

Колков Иван Евгеньевич, независимый исследователь, kolkov@mail.ru

Математический маятник известен нам, прежде всего, как модель, демонстрирующая изохронные колебания, которые описываются монохромной гармонической функцией времени. Однако при больших углах отклонения от вертикали период колебаний становится зависимым от начального угла отклонения, а спектр колебаний приобретает частоты кратные основной.

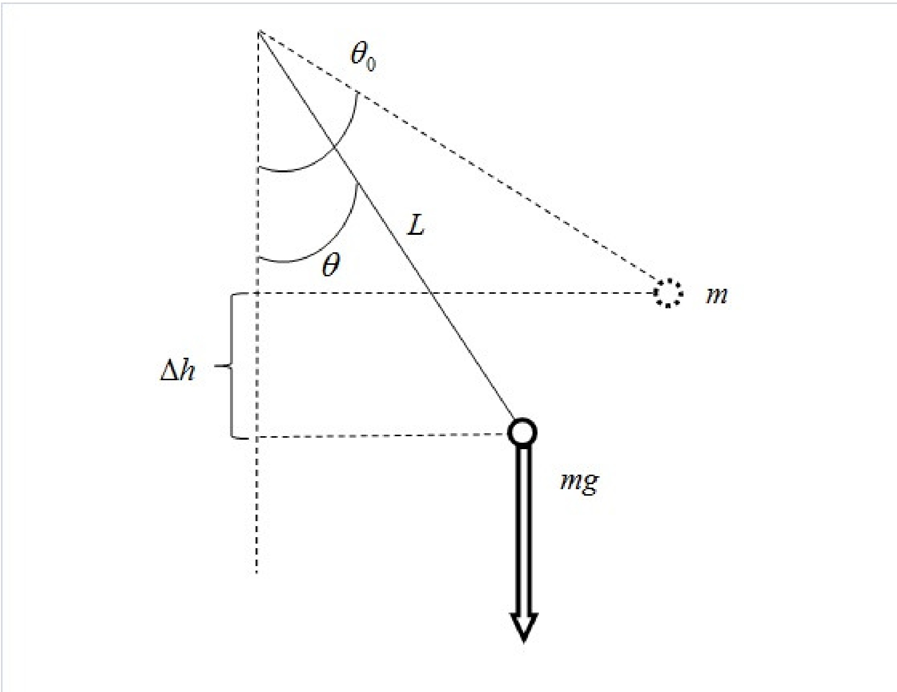

Рис. 1.

Уравнение движения математического маятника можно получить через работу силы тяжести, которая приводит к изменению кинетической энергии тела (Рис. 1)

$$\Delta E_k = mg\Delta h$$

Если в начальный момент времени скорость тела в точке максимального отклонения от вертикали была равна нулю, то изменение кинетической энергии со временем можно записать следующим образом:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = mg\Delta h$$

или, сокращая массу и учитывая, что $\upsilon = L\dfrac{d\theta}{dt}$

$$L^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)\ .$$

Это уравнение можно переписать иначе:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 4\frac{g}{L}(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2})$$

Вводя собственную частоту $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$, получим связь времени и угла в виде:

$$\omega_0 dt = \frac{d\theta}{2\sqrt{(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2})}} ,$$

откуда

$$\omega_0 t = \int_0^\theta \frac{d\frac{\theta}{2}}{\sqrt{(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2})}}$$

Проводя подстановку

$\sin\frac{\theta}{2} = u\sin\frac{\theta_0}{2}$,

и обозначая $k = \sin\frac{\theta_0}{2}$,

получим

$$\omega_0 t = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} .$$

Далее, непосредственно из определения специальной функции синуса амплитуды или синуса Якоби следует равенство[1]:

$$u = sn(\omega_0 t) ,$$

Таким образом, мы получаем зависимость угла отклонения маятника от времени:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta_0}{2} sn(\omega_0 t)$$

или

$$\theta(t) = 2\arcsin\left[\sin\frac{\theta_0}{2} sn(\omega_0 t)\right].$$

И вот здесь наступает важный момент в понимании физики процесса. Мы знаем, что в линейном приближении колебания маятника изохронны, и описываются дифференциальным уравнением вида:

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \theta$$

Решением данного уравнения, в частности, является функция

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t) .$$

Следовательно, при незначительном увеличении амплитуды колебания маятника, временная зависимость угла отклонения будет слабо отличаться от синусоиды, хотя частота ее уже не будет равна ω_0. Частота нелинейных колебаний обратно пропорциональна периоду, который равен

$$T = \frac{4K(k)}{\omega_0}, \; (k = \sin\frac{\theta_0}{2})$$

где $K(k) = \int\limits_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$ - полный эллиптический интеграл первого рода.

Функция $K(k)$ может быть представлена в виде бесконечного ряда:

$$K(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \right)^2 k^{2n} ,$$

однако уже при $n = 5$ ряд отлично аппроксимирует функцию $K(k)$ во всем диапазоне углов θ_0 от $0°$ до $90°$ (Рис. 2).

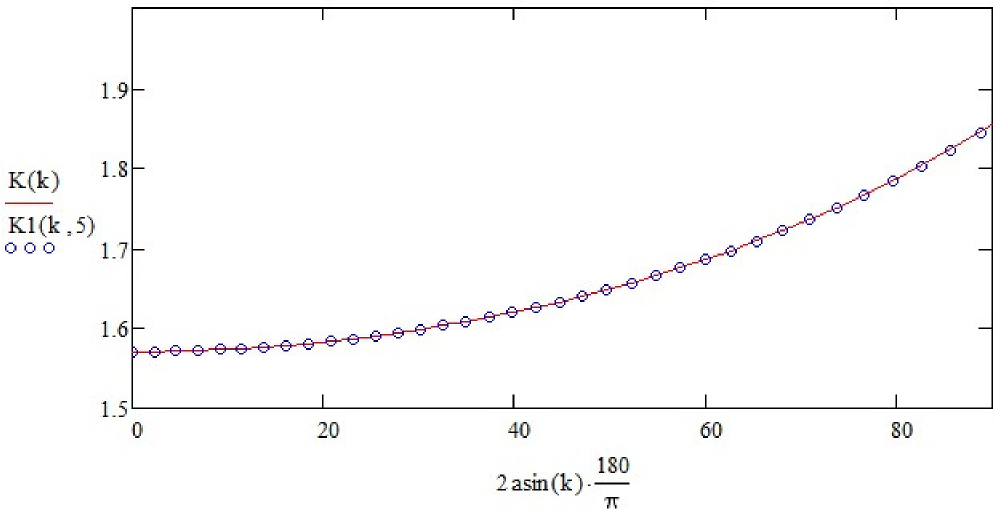

Рис. 2.

Посмотрим, как ведет себя разность истинного колебания и чистой синусоиды, если начальный угол отклонения $\theta_0 = \pi / 3$, $\theta_1(t) = \theta_0 \cos(\omega t)$ (Рис. 3).

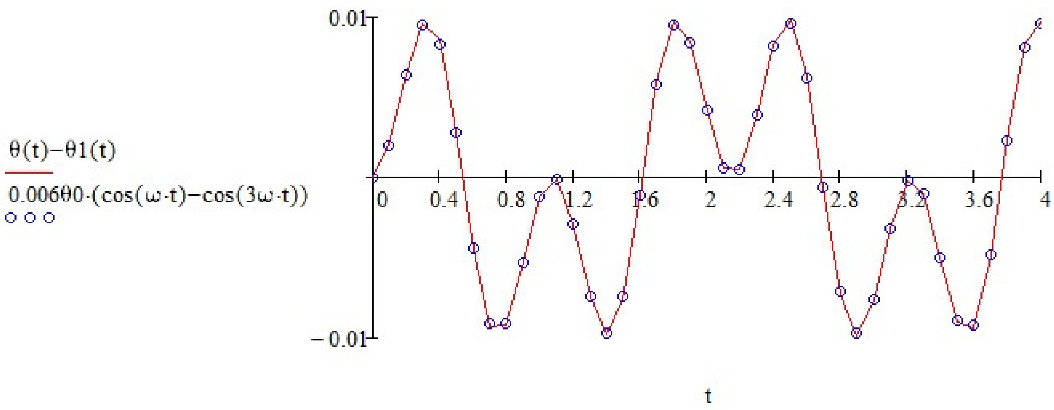

Рис. 3.

Итак, колебание маятника с начальным углом отклонения от вертикали $\theta_0 = \pi / 3$ ангармоническое и складывается из колебаний как минимум двух частот, основной и утроенной. Кроме утроения частоты наблюдается и еще один нелинейный эффект – усиление первой гармоники [2]. Теперь зависимость угла от времени мы можем записать так:

$$\theta(t) = (\theta_0 + \delta\theta_0)\cos(\omega t) - \theta_0 \delta\theta_0 \cos(3\omega t)$$

Выясним, как связана амплитудная добавка $\delta\theta_0$ с начальным углом отклонения от вертикали. Как известно, колебания математического маятника описываются дифференциальным уравнением, которое выводится из баланса сил инерции и гравитации:

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin\theta$$

Если ограничиться только двумя членами в разложении синуса, получим следующее уравнение:

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2\theta + \frac{\omega_0^2}{6}\theta^3$$

У Ландау в [3] приводится решение подобного, но более общего уравнения

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2\theta - \alpha\theta^2 - \beta\theta^3$$

методом последовательных приближений. В нашем случае $\alpha = 0$, $\beta = -\dfrac{\omega_0^2}{6}$

Результирующее колебание в общем случае складывается из трех:

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3,$$

причем

$\theta_1 = a\cos(\omega t)$.

В свою очередь

$\omega = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2$

Вторая составляющая результирующего колебания:

$$\theta_2 = -\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} + \frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2}\cos(2\omega t)$$

В нашем случае $\theta_2 = 0$, поскольку $\alpha = 0$.

Первая поправка к частоте $\omega_1 = 0$

Вторая поправка к частоте

$$\omega_2 = (\frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3})a^2 = -\frac{\omega_0}{16}a^2$$

В первом нелинейном приближении частота колебаний равна

$$\omega = \omega_0(1 - \frac{\theta_0^2}{16})$$

Истинное значение частоты при $\theta_0 = \pi/3$ равно 2.918 $рад/с$, расчетное - 2.917 $рад/с$. Отличие от точного значения составляет всего лишь 0.034%.

Третья составляющая результирующего колебания

$$\theta_3 = \frac{a^3}{16\omega_0^2}(\frac{\alpha^2}{3\omega_0^2} + \frac{\beta}{2})\cos(3\omega t) = -\frac{a^3}{192}\cos(3\omega t).$$

Теперь, возвращаясь к записи результирующего колебания в виде

$$\theta(t) = (\theta_0 + \delta\theta_0)\cos(\omega t) - \theta_0\delta\theta_0\cos(3\omega t),$$

мы можем составить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{a^3}{192} = \theta_0\delta\theta_0 \\ a = \theta_0 + \delta\theta_0 \end{cases},$$

откуда найдем a и $\delta\theta_0$.

Искомое a является корнем кубического уравнения

$$a^3 - 192\theta_0 a + 192\theta_0^2 = 0 .$$

Не воспроизводя всех выкладок, запишем сразу выражение для нужного нам корня этого уравнения, полученное с помощью тригонометрической формулы Виета:

$$a = -16\sqrt{\theta_0}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos(\frac{3}{16}\sqrt{\theta_0}) - \frac{2\pi}{3}\right]$$

Для $\theta_0 = \pi/3$ значение $a = 1.053$, $\delta\theta_0 = 0.0058$. Как можно видеть на Рис. 3, мы добились визуально наилучшей аппроксимации при $\delta\theta_0 = 0.006$. Следовательно, наш расчет верен.

В действительности сложное выражение для a может быть аппроксимировано простой зависимостью (Рис. 4).

$$a \approx \theta_0 + 0.0053\theta_0^2$$

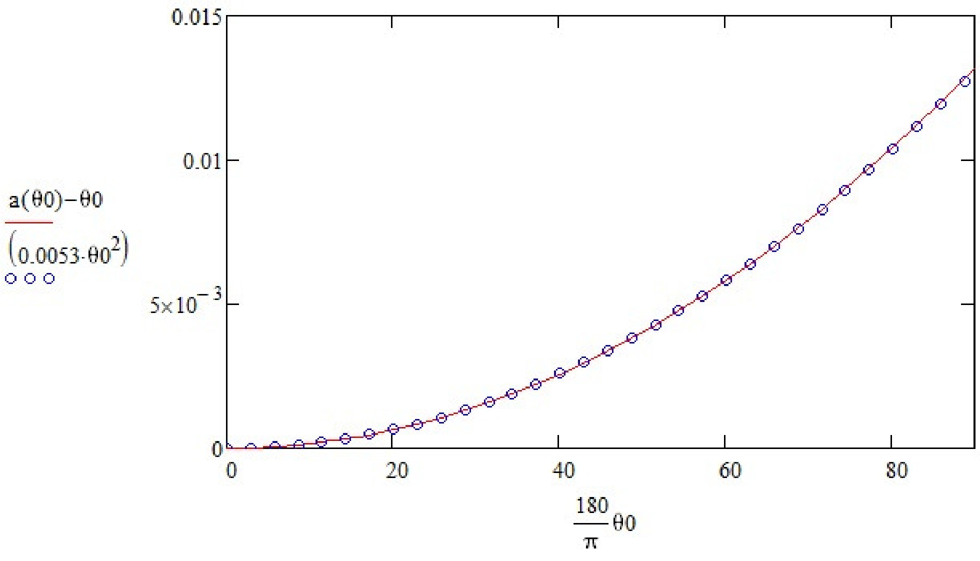

Рис. 4.

Итак, с помощью аппроксимации ангармонического колебания математического маятника гармоническими функциями нам удалось существенным образом упростить выражение для закона его движения. В результате были выявлены два нелинейных эффекта, которые могут наблюдаться в системах с синусоидальной нелинейностью – усиление первой гармоники и утроение основной частоты.

Источники информации

1. Аппель П. Теоретическая механика. Том 1. Статика. Динамика точки. — М.: Физматлит, 1960.

2. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. Москва: Издательство физико-математической литературы, 2002.

3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — Издание 4-е, исправленное. — М.: Наука, 1988.